No. 1 Date 13/12/2019

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

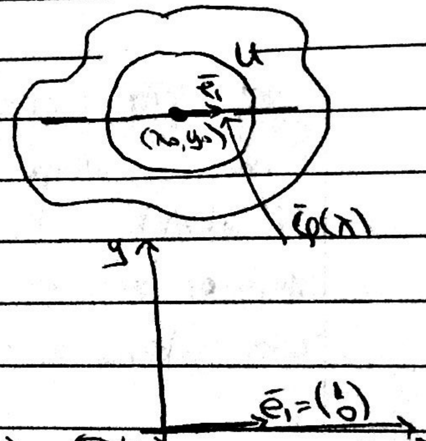
Είδαμε ότι για $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ στο σημείο $(x_0, y_0) \in U$ [$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \; B((x_0,y_0), \varepsilon) \subset U$] είναι η παράγωγος της συνάρτησης $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \ni x \longmapsto f(x, y_0)$ στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, αφού για $\bar{\varphi}(h) = \begin{pmatrix} \varphi_1(h) \\ \varphi_2(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|h| < \varepsilon$,

δηλ. για την ευθεία $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[= \bar{\varphi}(h)]$, $|h| < \varepsilon$, που

βρίσκεται στο U.

Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1,0)) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\bar{\varphi}(h)) - f(\bar{\varphi}(0))}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{(f \circ \bar{\varphi})(h) - (f \circ \bar{\varphi})(0)}{h}$



Υπενθύμιση: $U \subset \mathbb{R}^2$ πεδίο ορισμού $\Gamma_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in U \right\} \subset \mathbb{R}^3$ γράφημα της $f: U \to \mathbb{R}\ [= \mathbb{R}^1]$

[Π.χ. $f(x,y) = \underbrace{x^2 + y^2}_{= \|(x,y)\|^2 = g(\|(x,y)\|)}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \Gamma_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Επιφάνεια παραμετρικοποιημένη μέσω των $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Είναι η επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ (Ελλειπτικό παραβ.) → από αναλυτική γεωμετρία

Scanned with CamScanner

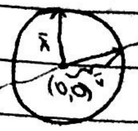
Ορισμός: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, και $\bar{x} \in U$

και $\boxed{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ με } \|\bar{x}\| = 1}$

οποιοδήποτε (είναι πολλά!!!)

πχ στο $\mathbb{R}^2 = U$ στο σημείο $(0,0)$. Οι κατευθύνσεις $\underbrace{(v_1, v_2)}_{=\bar{v}} \in \mathbb{R}^2$ με

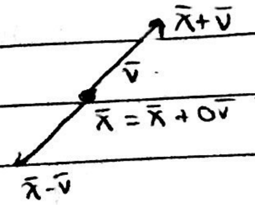
$v_1^2 + v_2^2 = 1$ είναι



Παρατηρούμε: οι $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ είναι διακεκριμένες κατευθύνσεις.

Αυτό το όριο είναι ο ορισμός

Το όριο $$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(\bar{x}+h\bar{v})}^{=(f\circ\bar{\varphi})(h)} - \overbrace{f(\bar{x})}^{=(f\circ\bar{\varphi})(0)}}{h}$$

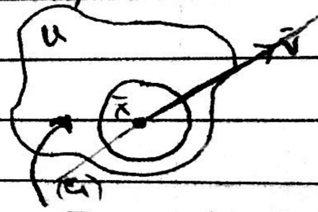


ονομάζεται παράγωγος κατά κατεύθυνση $\bar{v}$.

Είναι η παράγωγος της συνάρτησης μιας μεταβλητής $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni h \mapsto$ $f(\bar{\varphi}(h)) = (f\circ\bar{\varphi})(h) \in \mathbb{R}$ με $\bar{\varphi}(h) = \bar{x} + h\bar{v}$, $h \in \mathbb{R}$ η ευθεία που περνάει από το $\bar{x}$ και έχει κατεύθυνση $\bar{v}$. [όπου $B(\bar{x}, \varepsilon) = U$]

στο σημείο $h = 0 \to \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = (f\circ\bar{\varphi})'(0)$ με

το την πάνω $\bar{\varphi}$.



Θεώρημα:

Αν η $f: U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$ [$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό] τότε η f έχει στο $\bar{x}$ κατευθυνόμενη παράγωγο προς κάθε κατεύθυνση $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$, και μάλιστα $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v}$.

Απόδειξη (το υπόλοιπο μετά): Με τους ορισμούς πιο πριν έχουμε $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = (f\circ\bar{\varphi})'(0)$ όπου $\bar{\varphi}(h) = \bar{x} + h\bar{v}$, $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ για $\varepsilon > 0$ τ.ω. $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$.

$\bar{\varphi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \iff \bar{\varphi}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη στο $\bar{0}$ $\iff$

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\bar{\varphi}(\bar{0}+\bar{h}) - \bar{\varphi}(\bar{0}) - D\bar{\varphi}(0)\cdot\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \bar{0}$$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

Συνέπεια (ειδική περίπτωση διαφόρισης συνάρτησης $k \in \mathbb{N}$ ανεξ. πραγμ. μεταβλητών με $m \in \mathbb{N}$ εξαρτ. πραγμ. μεταβλητές)

μια $\bar{\varphi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $0 \in \mathbb{R}$ αν $\exists\, \underbrace{\bar{\varphi}(0)}_{= D\bar{\varphi}(0)} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$\text{με } \lim_{h \to 0} \frac{\underbrace{\bar{\varphi}(h)}_{\in \mathbb{R}^{n \times 1}} - \underbrace{\bar{\varphi}(0)}_{\in \mathbb{R}^{n \times 1}} - \underbrace{D\bar{\varphi}(0)}_{\in \mathbb{R}^{n \times 1}} \underbrace{h}_{\in \mathbb{R}}}{|h|} = 0 \qquad D\bar{\varphi}(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Εδώ: $\bar{\varphi}(h) = \bar{x} + h\bar{x} = \bar{\varphi}(0) + h\bar{v} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{h(\bar{v} - D\bar{\varphi}(0))}{|h|} = 0$

$\Rightarrow \forall j = 1, \ldots, n: \lim_{h \to 0} \frac{h}{|h|}(v_j - a_j) = 0 \Rightarrow$ Τέτοιο $D\bar{\varphi}(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ υπάρχει και είναι το $\bar{v}$.

$\Rightarrow$ η $\bar{\varphi}(h) = \bar{x} + h\bar{v}$ είναι διαφορίσιμη στο 0 με παράγωγο
$\underbrace{D\bar{\varphi}(0)}_{= \bar{\varphi}'(0)} = \bar{v}$